Lösungen zu Wiederholungsaufgaben Mathematik

I) Zahlenbereiche

1. Zu welchem Zahlenbereich ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) gehören die folgenden Zahlen:

a) $1 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
b) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
c) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
d) $\frac{4}{2} \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
e) $\sqrt{\frac{2}{3}} \in \mathbb{R}$
f) $-7 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
g) $-7{,}5 \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
h) $0 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
i) $\frac{-3}{7} \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
j) $-\frac{3}{7} \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
k) $\pi \in \mathbb{R}$

2. Welcher Zahlenbereich (natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen) ist hier beschrieben?

a) $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen)
b) $\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0\}$ $\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen)
c) {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen)

II) Mathematische Fachsprache

1. Kennst Du die mathematischen Fachbegriffe für die Beschreibungen?

a) Linie zwischen 2 Punkten: Strecke
b) 2 Geraden, die sich in einem Winkel von 90° schneiden: 2 Orthogonalen, 2 Senkrechten, 2 sich orthogonal / senkrecht schneidende Geraden
c) 2 Geraden, die keine gemeinsamen Punkte besitzen: 2 Parallelen, 2 parallele Geraden
d) Linie durch einen Punkt: Gerade

2. Wie lauten diese mathematischen Gesetze?

a) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$: Distributivgesetz
b) $a\cdot b = b\cdot a$: Kommutativgesetz der Multiplikation
c) $a+b = b+a$: Kommutativgesetz der Addition
d) $(a+b)+c = a+(b+c)$: Assoziativgesetz der Addition
e) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$: Assoziativgesetz der Multiplikation

3. Übersetze die folgenden Beschreibungen in mathematische Ausdrücke.

a) Bilde die Summe aus a und b.
a+b
b) Bilde die Differenz aus a und b.
a-b
c) 3 aus den natürlichen Zahlen.
$3 \in \mathbb{N}$
d) $\frac{-2}{5}$ ist nicht aus den reellen Zahlen.
$\frac{-2}{5} \notin \mathbb{R}$
e) Bilde eine Summe: Der 1. Summand ist 3 dividiert durch 5 und der 2. Summand ist 5 zum Quadrat.
$\frac{3}{5} + 5^2$
f) Bilde ein Produkt. Der 1. Faktor ist die Summe aus a und b, der 2. Faktor ist der Betrag der Differenz aus c und d.
$(a+b)\cdot|c-d|$ bzw. $(a+b)\cdot|d-c|$
g) a multipliziert mit der dritten Wurzel aus b, dividiert durch den Betrag von c.
$\frac{a\cdot\sqrt[3]{b}}{|c|}$
h) 2 hoch 3 ist kleiner gleich 9.
$2^3 \leq 9$
i) Der Zähler des Bruchs ist die Summe aus a und b, der Nenner ist das Quadrat von c.
$\frac{a+b}{c^2}$

4. Quadratzahlen

a) Nenne alle Quadratzahlen zwischen 100 und 300.
IL={100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289}

b) Berechne ohne Taschenrechner:
$\sqrt{289} + \sqrt{144} =$

c) Schreibe die ersten 20 Quadratzahlen auf. Welche sind durch 3, 4 oder 6 teilbar?
{ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400}

Durch 3 teilbar: {9,36,81,144,225,324}

Durch 4 teilbar: {4,16, 36,64,100,144,196,256,324,400}

Durch 6 teilbar: {36,144,324}

d) Nenne drei verschiedene Quadratzahlen, die die Quersumme 13 haben.

j) {49 , 256, 625}

III) Gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche / Prozentangaben

1. Grundlagen

a)

Gewöhnlicher Bruch	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{31}{100}$	$\frac{40}{10}=\frac{4}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{200}{100}=\frac{2}{1}$	$\frac{1}{250}$
Dezimalbruch	0,25	0,8	1,7	0,31	4,0	$0,\overline{3}$	3,5	0,01	0,625	2,00 = 2	0,004
Prozentsatz	25%	80%	170%	31%	400%	$33,\overline{3}\%$	350%	1%	62,5%	200%	0,4%

b)

(1) $0{,}35 < \frac{400}{1000} < 50\% = \frac{1}{2} < \frac{3}{5} = 0{,}6$

(2) $1{,}38 < 1{,}5 < \frac{13}{8} < 2 < 350\% < \frac{15}{4}$

c) z. B.: 0,45; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$ und 0,7

d) Sie könnten z. B. für eine Einheit Ihres Zahlenstrahles 10 cm wählen. Dann müssten Sie die Brüche in folgender Reihenfolge mit folgenden Abständen von 0 eintragen:

$\frac{1}{5}$;	$\frac{1}{4}$;	$\frac{3}{8}$;	$\frac{1}{2}$;	$\frac{6}{10}$;	$\frac{3}{4}$;	$1\frac{2}{5}$;	$\frac{6}{4} = \frac{15}{10}$;	2
nach	nach	nach	nach	nach	nach	nach	nach	nach
2 cm	2,5 cm	3,75 cm	5 cm	6 cm	7,5 cm	14 cm	15 cm	20 cm

e)

(1) $\frac{3}{8}=\frac{18}{48}$ [6] $\frac{4}{3}=\frac{60}{45}$ [15] $\frac{8}{9}=\frac{16}{18}$ [2] $\frac{a}{b}=\frac{10a}{10b}$ [10]

(2) $\frac{30}{170}=\frac{3}{17}$ [10] $\frac{48}{82}=\frac{24}{41}$ [2] $\frac{28}{20}=\frac{7}{5}$ [4] $\frac{8y}{72}=\frac{y}{9}$ [8]

f)

$\frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$ $\frac{40}{10} = 4$ $\frac{302}{100} = 3\frac{2}{100}$ $\frac{6}{1} = 6$ $\frac{48}{12} = 4$

g)

$4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ $5 = \frac{50}{10}$ $60\frac{1}{2} = \frac{121}{2}$ $9\frac{7}{1000} = \frac{9007}{1000}$

2. Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen

a)

$\frac{39}{100} = 0{,}39$ $\frac{34}{45} = 0{,}7\overline{5}$ $\frac{11}{32} = 0{,}34375$ $-\frac{17}{42} \approx -0{,}405$ $\frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$

b)

$\frac{8}{5}$ bzw. 1,6 $\frac{67}{9}$ bzw. $7{,}\overline{4}$ 0 $\frac{2+a}{2}$ $\frac{4+b}{4b}$ für $b \neq 0$

c)

$\frac{3}{32} = 0{,}09375$ 6 $\frac{40}{7} \approx 5{,}714$ $\frac{33}{70} \approx 0{,}471$ $\frac{5}{32} = 0{,}15625$

d)

$\frac{8}{75} = 0{,}10\overline{6}$ $\frac{1}{10} = 0{,}1$ $\frac{d}{30} = 0{,}0\overline{3}d$ $\frac{2}{b}$ für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ $\frac{2}{5}t = 0{,}4t$

$\frac{37}{20} = 1{,}85$ $\frac{1}{2} = 0{,}5$

e) Es bleiben $\frac{5}{12}$ der Tafel Schokolade (für Victoria☺) übrig. Das sind $41{,}\overline{6}$ %.

f) Bäcker Meiers Dunkelbrot besteht demnach zu $\frac{3}{5}$ aus Trockenmasse. Insgesamt enthält es daher $\frac{21}{500} = 0{,}042 = 4{,}2$ % Eiweiße, $\frac{18}{500} = 0{,}036 = 3{,}6$ % Fette und $\frac{261}{500} = 0{,}522 = 52{,}2$ % Kohlenhydrate. In einem 1-kg-Brot dieser Sorte sind also 42 g Eiweiße, 36 g Fette, 522 g Kohlenhydrate und $\frac{2}{5} = 40$ %, also 400 g Wasser enthalten.

g) Lucy erhofft sich einen Verkaufspreis von 800 EUR.

h) Das Auto hat damals 20 000 EUR gekostet.

IV) Potenzrechnung

1. Berechnen Sie!

a) 125 **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** 64 d) -32

2. Berechnen Sie!

$a)$ 9 $b)$ 64 $c)$ $\frac{81}{256}$ $d)$ 8

3. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$a)\ (-a)^5$ $b)\ x^{\frac{7}{4}}$ $c)\ 1$ $d)\ 3^{\frac{1}{2}k}$

$e)\ 4^k$ $f)\ 5^{-3}$ $g)\ (p^2-q^2)^2$ $h)\ 1$

$i)\ \frac{b^{n-m}}{a^m} = \frac{b^n}{(ab)^m}$ $j)\ \frac{(x+y)^3}{(a+b)^2}$ $k)\ 81u^6v^{-5}$ $l)\ (1-2x)^6$

4. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$a)\ 16$ $b)\ a^2b^5$ $c)\ \frac{m^3}{3n^8}$ $d)\ \left(\frac{x+y}{a+b}\right)^2$

5. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$a)\quad x^{\frac{17}{22}}\quad b)\quad y^{\frac{5}{6}}\quad c)\quad 3^{3n}\qquad d)\ 2^{12}=4096$

6. Vereinfachen Sie so weit wie möglich (die Zahl unter der Wurzel soll möglichst klein sein)!

$a)\,4b\sqrt{7a}\qquad b)\,2xy^2\cdot\sqrt[3]{13}\qquad c)\,\frac{3k}{2\sqrt{2j}}\qquad d)\quad (a-3)\sqrt[3]{(a+3)}$

7. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$a)30a^5\cdot n^8\qquad b)\quad 4a^4c^3x^8\qquad c)\quad 3^x\qquad d)\quad \frac{1}{4}a^6b^9c^8$

8. Wahr oder falsch! Notieren Sie Ihre Entscheidung mit w (wahr) oder f (falsch) an der entsprechenden Gleichung!

$a)\ Wenn\ \ f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^4\quad dann\ \ ist\quad (1)\ f(0{,}5)=1\ w\qquad (2)\ \ f(-0{,}5)=1\quad f$

$b)\ -(-2^3)=-8\quad f\qquad c)\ -(2^{-3})=\frac{1}{8}\quad f\qquad d)-(-2)^5=32\quad w$

V) Terme und Bruchterme

1. Vereinfache die Terme

a) 20abc
b) $24xyz$
c) $-105rst$

2. Fasse zusammen

a) $8c$
b) 11x
c) $13a$
d) $11x+14y$
e) $10a+6b$
f) $115e-45g+11$
g) $-10r^2$
h) $\frac{25}{8}ab^2$
i) $11(a+b)$
j) $8(b+c)$
k) $12x^2+17y^2$
l) $970z^2+714y^2+1200$

3. Löse die Klammern auf und fasse dann zusammen

a) $13x^2-15xy$
b) $5ab+12ac$
c) $54rs-37r^2$
d) $44rs+12rt$
e) $67a^2-40ab+21b^2$
f) $15ax-7a$
g) $155ab-108ac+98bc$
h) $-30x^3+80x^2-72x$
i) $61x+6y$
j) $34a+31b$
k) $-85a+53b$
l) $40a^4-73a^2b-33b^2$
m) $42x^4-110x^2y+72y^2$
n) $35x^3+56x^2y^2-20xy-32y^3$
o) $36r^3-24r^2s+18rs^2-12s^3$
p) $35a^2-42ab-4ac+30bc-15c^2$
q) $200u^2+160u-230uv-104v+65v^2$
r) $2a^3+11a^2+8a-6$
s) $8x^4-24x^3-38x^2+30x+35$
t) $30a^2+21ab-75ac-36b^2+60bc$
u) $18x^4-27x^3-62x^2+63x$
v) $10y^4+y^3-41y^2+28y$
w) $-15b^3-19b^2+6b+8$

4. Klammere so weit wie möglich aus

a) $4ab \cdot (5c+6)$
b) $9ab \cdot (5a-4b)$
c) $24yz \cdot (2x-3)$
d) $6u^2v^2 \cdot (4u+3)$
e) $\frac{3}{10}x \cdot (x-3y)$
f) $x \cdot (a+b+c)$
g) $a \cdot (3a+7b-8b^2)$
h) $11y \cdot (4ay-5b+6cy)$
i) $5u \cdot (2u-5v-7u^2v^2)$
j) $6abx \cdot (2a^2x-5-bx)$

5. Wende erst binomische Formeln an und fasse dann zusammen

a) $77x^2-126xy+58y^2$
b) $153u^2-48uv+39v^2$
c) $202a^2-408ab+208b^2$
d) $-175x^2+390xy-200y^2$
e) $116a^2+196ab+114b^2$
f) $194x^2-225y^2$
g) $64x^2+176xs-513s^2+1042rs-449r^2$
h) $229c^2-758cd+231d^2$

6. Faktorisiere mit Hilfe der binomische Formeln

a) $(0{,}6+a)(0{,}6-a)$
b) $(x+1{,}2)(x-1{,}2)$
c) $\left(r+\frac{9}{5}\right)\left(r-\frac{9}{5}\right)$
d) $(5r+4s)(5r-4s)$
e) $(0{,}3u+0{,}7v)(0{,}3u-0{,}7v)$
f) $(12c+11d)(12c-11d)$
g) $(3a+b)^2$
h) $(8y-z)^2$
i) $(x+4z)^2$
j) $(r-8s)^2$
k) $(2a+10b)^2$
l) $(6r+3s)^2$
m) $(0{,}4a+0{,}6b)^2$

7. Kürze und vereinfache die Brüche so weit wie möglich

a) $\frac{2x}{3y}$
b) -3
c) $\frac{5a}{2}$
d) $\frac{2ab}{5}$
e) $\frac{a-b}{3(r+s)}$
f) $\frac{2(x+y)}{3}$
g) $\frac{3}{7}$
h) 1
i) $\frac{a-b}{3}$
j) $\frac{4}{x+y}$
k) $\frac{4a+7c}{3}$
l) $\frac{3s-4t}{5}$
m) $\frac{3}{8b^2-5}$
n) $\frac{z}{y}$
o) $\frac{1}{4}$
p) $\frac{1}{3}$
q) $\frac{-8}{9}$
r) $\frac{b}{a}$
s) $\frac{7r}{6s}$
t) $\frac{5x}{7y}$

8. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich

a) $\frac{x}{2}$
b) $\frac{19a-b}{3}$
c) $\frac{a+4b}{4x}$
d) $-\frac{15}{2}$
e) $\frac{10}{11}$
f) $\frac{y+6z}{13a}$
g) $\frac{30a-31b}{12}$
h) $\frac{2(-2x^2+4xy+y^2)}{xy}$
i) $\frac{15aby-15bxy+4abx+4axy}{36abxy}$
j) $\frac{r-19}{(r+5)(r-7)}$
k) $\frac{c(c+85)}{(c-5)(c+5)}$
l) $\frac{7r^2-24s^2}{(3r-s)(4r+5s)}$
m) $\frac{6x}{7y^2}$
n) $-\frac{9cd}{ab}$
o) $9(a^2-b^2)$
p) $\frac{2ab}{5(a-b)}$
q) $\frac{2}{x-y}$
r) $\frac{2-z}{x+1}$

V) Gleichungen

V.1) Lineare Gleichungen

1. Bestimme die Lösungsmenge IL:

a) $IL=\{4\}$ b) $IL=\{6\}$ c) $IL=\{5\}$ d) $IL=\{3\}$

2. Bestimme die Lösungsmenge IL:

a) $IL=\{15\}$ b) $IL=\{-1\}$ c) $IL=\{\frac{20}{7}\}$ d) $IL=\{\}$ e) $IL=IR$

3. Bestimme die gesuchte Zahl mit Hilfe einer Gleichung

a) $IL = \{5\}$ b) $IL = \{0{,}1\}$

V.2) Quadratische Gleichungen

1. Bestimme die Lösungsmenge IL:

a) $IL = \{-3;3\}$ b) $IL = \{\,\}$ c) $IL = \{-1{,}1;0;1{,}1\}$ d) $IL = \{-4;0;4\}$

2. Bestimme die Lösungsmenge IL:

a) $IL = \{-5;1\}$ b) $IL = \{1{,}4;2\}$ c) $IL = \{-\frac{3}{2};1\}$ d) $IL = \{\,\}$ e) $IL = \{3\}$

3. Bestimme die Lösungsmenge IL:

a) $IL = \{-6;-2\}$ b) $IL = \{0;10\}$ c) $IL = \{-2;-1;1;2\}$

V.3) Bruchgleichungen:

Bestimme den Definitionsbereich ID und die Lösungsmenge IL:

a) $ID = IR \setminus \{0\}$ $IL = \{1;4\}$ b) $ID = IR \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ $IL = \{-1;2\}$ c) $ID = IR \setminus \{0;2\}$ $IL = \{4;5\}$

d) $ID = IR \setminus \{-1;0\}$ $IL = \{-2\}$ e) $ID = IR \setminus \{0;2\}$ $IL = \{8;10\}$

V.4) Ungleichungen:

a) $IL = \{x \in IR \mid x < 5\}$ b) $IL = \{x \in IR \mid x > -3{,}5\}$ c) $IL = \{x \in IR \mid x \le 2\}$ d) $IL = \{\,\}$

VI) Lineare Gleichungssysteme

1. x = 2 ; y = 2

2. a) x = 1 ; y = 4 günstigstes Verfahren: Gleichsetzungsverfahren
   b) x = –1 ; y = 3 günstigstes Verfahren: Einsetzungsverfahren

   c) x = 2 ; y = –2 günstigstes Verfahren: Additionsverfahren

3. a) keine Lösung: IL = { }
   b) unendlich viele Lösungen: IL = { (x ; y) I y = 2 x + 3}
   c) eine Lösung: x = 4 ; y = 0 bzw. IL = { (4 ; 0) }

4. a) a ≠ 6 ; b beliebig
   b) a = 6 ; b ≠ 5

   c) a = 6 ; b = 5

5. a) a = 30 ; b = 30 günstigstes Verfahren: Einsetzungsverfahren

b) a = 60 ; b = –52 günstigstes Verfahren: Additionsverfahren

c) $c = \frac{2}{3}$; $d = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ günstigstes Verfahren: Einsetzungsverfahren (Ersetzen von 3d durch 9 c + 2 in der ersten Gleichung!)

d) u = 2, v = 4

günstigstes Verfahren: Einsetzungsverfahren

e) $x = \frac{76}{9} = 8\frac{4}{9}$; $y = \frac{184}{9} = 20\frac{4}{9}$

günstigstes Verfahren: Additionsverfahren (z.B.: Multiplikation der 1. Gleichung mit –4, Multiplikation der 2. Gleichung mit 5)

f) x = – 42 ; y = 23

günstigstes Verfahren: Gleichsetzungsverfahren

g) x = 15 ; y = 20

Lösungshinweis: Zunächst müssen die Klammern ausmultipliziert werden und die beiden Gleichungen durch Zusammenfassen geeigneter Terme vereinfacht werden.

h) x = 2 ; y = –1

Lösungshinweis: Multiplikation der 1. Gleichung mit 10 (kleinstes gemeinsames Vielfaches von 2 und 5), Multiplikation der 2. Gleichung mit 24 (kleinstes gemeinsames Vielfaches von 3 und 8), anschließend Vereinfachung der Gleichungen durch Zusammenfassen geeigneter Terme)

i) x = –38 ; y = 29

Lösungshinweis: Multiplikation der beiden Gleichungen mit einem geeigneten Faktor, anschließend Anwendung des Additionsverfahrens

j) $x = \frac{65}{6} = 10\frac{5}{6}$; $y = \frac{55}{4} = 13\frac{3}{4} = 13{,}75$

Lösungshinweis: Multiplikation der 1. Gleichung mit 6 und Multiplikation der 2. Gleichung mit 30, um Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten zu erhalten; anschließend: Multiplikation der beiden Gleichungen mit einem geeigneten Faktor und Anwendung des Additionsverfahrens

6. Zahlenrätsel

a) I $x + y = 50$

II $x - y = 14$

$x = 32$; $y = 18$

günstigstes Verfahren : Additionsverfahren

b) I $4x + 6 = 3y - 5$

II $2x = y - 1$

$x = 4$; $y = 9$

günstigste Verfahren :

Auflösen der 2. Gleichung nach y und anschließend

Einsetzungsverfahren

oder Multiplikation der 2. Gleichung mi –2 und anschließend

Additionsverfahren

c) I $3x + 4y = -21$

II $2x - 4y = 10$

$x = -\frac{11}{5} = -2\frac{1}{5} = -2{,}2$; $y = -\frac{18}{5} = -3\frac{3}{5} = -3{,}6$

günstigstes Verfahren: Additionsverfahren